ΛΥΣΗ

α) Αφού το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, για τους οποίους το $f(x)$ έχει νόημα, είναι:

$$|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Επομένως $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Είναι: $f(-x) = \ln|-x| = \ln|x| = f(x)$.

Έτσι για κάθε $x \in D_f$ το $-x \in D_f$ και ισχύει $f(-x) = f(x)$.

Επομένως η συνάρτηση είναι άρτια και ως εκ τούτου συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

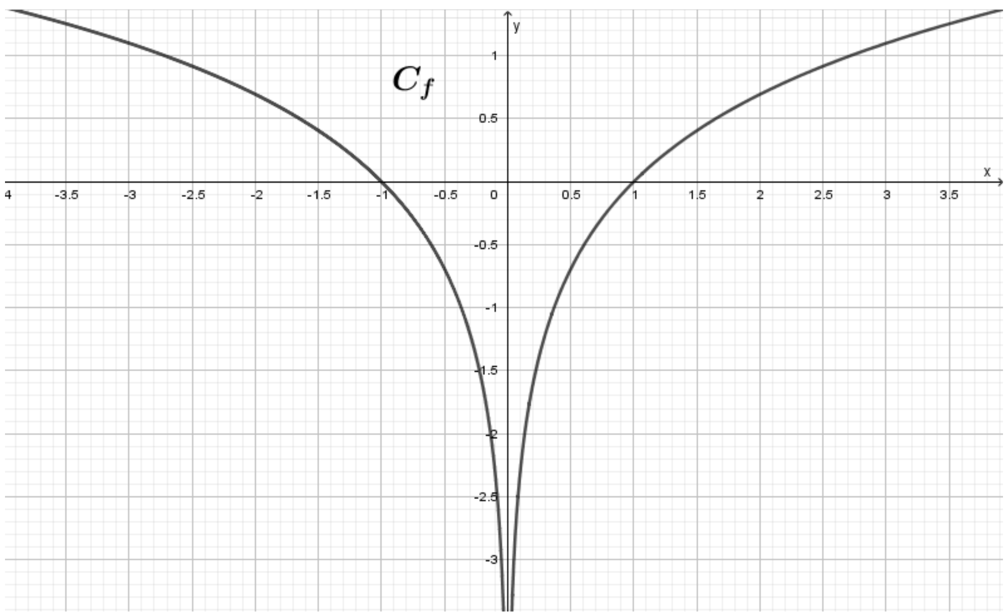
γ) Είναι: $f(x) = ln|x| = \begin{cases} lnx, & \text{αν } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{αν } x < 0 \end{cases}$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αποτελείται από δύο κλάδους.

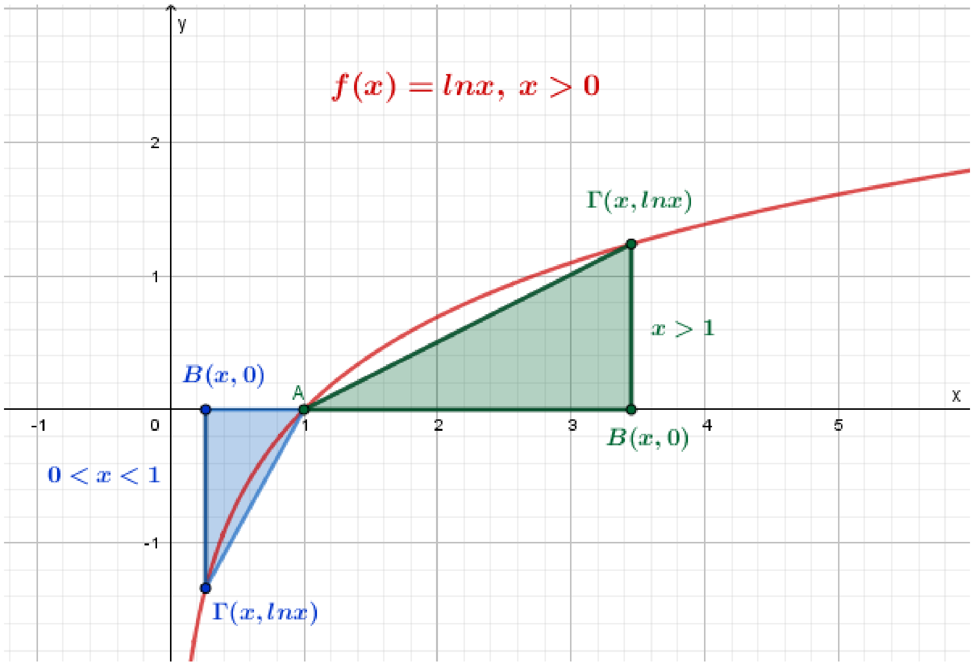
Αν $x > 0$, τότε έχουμε τη γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = lnx$.

Αν $x < 0$, παίρνουμε την συμμετρική καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = lnx$ ως προς τον άξονα $y'y$.

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η ακόλουθη:



δ) Υπάρχουν δύο περιπτώσεις, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- Αν $x > 1$:

$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒ)(ΒΓ)$, όπου $(ΑΒ) = |x-1| = x-1$ και $(ΒΓ) = |lnx| = lnx$.

Άρα $(ΑΒΓ) = \frac{(x-1)lnx}{2}$.

- Αν $0 < x < 1$:

$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒ)(ΒΓ)$, όπου $(ΑΒ) = |x-1| = 1-x$ και $(ΒΓ) = |lnx| = -lnx$.

Άρα $(ΑΒΓ) = \frac{(x-1)lnx}{2}$.

Επομένως η ζητούμενη συνάρτηση είναι:

$$E(x) = \frac{(x-1)lnx}{2}, \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty).$$