ΛΥΣΗ

α) Η πορεία του εντόμου είναι στην ευθεία της διακέντρου των κύκλων. Οι δύο πρώτοι κύκλοι, σύμφωνα με το σχήμα, έχουν κέντρα $\mathrm{A}(-2,1)$ και $\mathrm{B}(0,1)$, οι οποίοι βρίσκονται στην ευθεία $y=1$. Τα κέντρα των υπόλοιπων κύκλων ανήκουν στην ίδια ευθεία, άρα η πορεία του εντόμου είναι η $y=1$.

β)

i. Έχουμε για τους τέσσερεις; κύκλους:

C_1: κέντρο $\mathrm{A}(-2,1)$ και $\rho_1=3$

C_2: κέντρο $\mathrm{B}(0,1)$ και $\rho_2=2$

C_3: κέντρο $\Gamma(2,1)$ και $\rho_3=1$

C_4: κέντρο $\Delta(3,1)$ και $\rho_4=\frac{1}{2}$.

Μια ευθεία εφάπτεται σε κύκλο αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου από την ευθεία ισούται με την ακτίνα. Έχουμε

$$d(\mathrm{A},\varepsilon_1)=\frac{\left|3+2\sqrt{3}-3+4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12}}=\frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=3=\rho$$

$$d(\mathrm{B},\varepsilon_1)=\frac{\left|3-3+4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12}}=\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=2=\rho_2$$

$$d(\Gamma,\varepsilon_1)=\frac{\left|3-2\sqrt{3}-3+4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1=\rho$$

$$d(\Delta,\varepsilon_1)=\frac{\left|3-3\sqrt{3}-3+4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}=$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{3-4\sqrt{3}}{3}$ είναι κοινή εφαπτόμενη των τεσσάρων κύκλων.

ii. Η εφαπτομένη (ε_1) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ άρα και με την ευθεία $y=1$ γωνία ω, με $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $\omega=30^\circ$. Επίσης διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(4,1)$ αφού $\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4+\frac{3-4\sqrt{3}}{3}=1$, δηλαδή οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Λόγω συμμετρίας του σχήματος η άλλη κοινή εφαπτόμενη (ε_2) θα σχηματίζει με την ευθεία $y=1$ άρα και με τον άξονα $x'x$ γωνία $\varphi = 150^\circ$, οπότε $\varepsilon\varphi\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Οπότε έχουμε για την (ε_2): $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \beta$.

Λόγω της συμμετρίας η (ε_2) διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(4,1)$, οπότε $1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{3+4\sqrt{3}}{3}$.

Τελικά (ε_2): $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3+4\sqrt{3}}{3}$.

γ) Οι εφαπτόμενες (ε_1) και (ε_2) διέρχονται από το σημείο M από το ερώτημα β), το ίδιο και η ευθεία της διακέντρου, άρα το σημείο στάσης του εντόμου είναι το $\mathrm{M}(4,1)$.