ΛΥΣΗ

α) Αφού η παραβολή $C: y^2=\alpha\cdot x$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(16,\alpha+4)$ ισχύει:

$(\alpha+4)^2=16\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+8\alpha+16=16\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-8\alpha+16=0 \Leftrightarrow (\alpha-4)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=4$

Συνεπώς $C: y^2=4x$.

β) Για την παραβολή $C: y^2=4x$ ισχύει $2p=4 \Leftrightarrow \dfrac{p}{2}=1$,οπότε η εστία της παραβολής είναι η $\mathrm{E}(1,0)$ και η διευθετούσα δ έχει εξίσωση $x=-1$.

γ) Έστω $\mathrm{M}_1(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης ε_1 με την C. Αφού $\mathrm{M}_1\in C$ ανήκει ισχύει ότι: $y_1^2=4x_1$ (1).

Η ζητούμενη εφαπτομένη ε_1 έχει εξίσωση $y\cdot y_1=2(x+x_1)$ και για να είναι παράλληλη στην $\varepsilon_2: -x+2y+4=0$ θα πρέπει

$$\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2} \Leftrightarrow \frac{2}{y_1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow y_1=4.$$

Τότε από την (1) έχουμε: $4^2=4x_1 \Leftrightarrow x_1=4$.

Επομένως το σημείο επαφής είναι το $\mathrm{M}_1(4,4)$ και

$$\varepsilon_1: y\cdot 4=2(x+4) \Leftrightarrow 2y=x+4 \Leftrightarrow x-2y+4=0.$$

δ) Το κέντρο του κύκλου C_1 είναι η κορυφή της C δηλαδή το $\mathrm{O}(0,0)$.

Αφού η ευθεία ε_1 εφάπτεται του κύκλου C_1 για την ακτίνα ρ θα ισχύει

$$\rho=d(O,\varepsilon_1)=\frac{|0-2\cdot 0+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

και επομένως η εξίσωση του C_1 είναι

$$x^2+y^2=\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{16}{5}.$$