ΛΥΣΗ

α)

i. Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ δίνονται από την σχέση $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\left(x_{\Gamma}-x_{\mathrm{A}},y_{\Gamma}-y_{\mathrm{A}}\right)$, οπότε αντικαθιστώντας παίρνουμε $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\left(-1,-\frac{4}{3}\right)$. Όμοια παίρνουμε $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\left(-3,-4\right)$, δηλαδή έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\left(-1,-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-3,-4\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AO}}$.

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\left(\frac{4}{3},-1\right)$ και $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(4,-3\right)$, δηλαδή έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\left(\frac{4}{3},-1\right)=\frac{1}{3}\left(4,-3\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

ii. Είναι $\lambda_{\Gamma\Delta}=\dfrac{3-\frac{8}{3}}{\frac{13}{3}-2}=\frac{1}{7}$ και $\lambda_{\mathrm{OB}}=\dfrac{1-0}{7-0}=\frac{1}{7}$, επομένως $\Gamma\Delta//\mathrm{OB}$.

iii. Είναι $\left(\mathrm{A\Gamma\Delta}\right)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}},\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-1 & -\frac{4}{3}\\ \frac{4}{3} & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|1+\frac{16}{9}\right|=\frac{25}{18}$ τ.μ.

Ακόμα $\left(\mathrm{ABO}\right)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}4 & -3\\ -3 & -4\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-16-9\right|=\frac{25}{2}$ τ.μ. Επομένως έχουμε

$$\left(\mathrm{A\Gamma\Delta}\right)=\frac{25}{18}=\frac{1}{9}\cdot\frac{25}{2}=\frac{1}{9}\cdot\left(\mathrm{ABO}\right)\Leftrightarrow$$
$$\left(\mathrm{A\Gamma\Delta}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\mathrm{ABO}\right).$$

β) Έχουμε

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{\nu}\overrightarrow{\mathrm{AO}}\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{\nu}\left(x_{\mathrm{O}}-x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{O}}-y_{\mathrm{A}}\right)\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{1}{\nu}\left(0-3,0-4\right)\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=\left(-\frac{3}{\nu},-\frac{4}{\nu}\right).$$

Όμοια,

$$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\frac{1}{\nu}\overrightarrow{\mathrm{A}B}\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\frac{1}{\nu}\left(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}},y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}}\right)\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\frac{1}{\nu}\left(7-3,1-4\right)\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\left(\frac{4}{\nu},-\frac{3}{\nu}\right).$$

Επομένως $\left(\mathrm{A\Gamma\Delta}\right)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}},\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-\frac{3}{\nu} & -\frac{4}{\nu}\\ \frac{4}{\nu} & -\frac{3}{\nu}\end{matrix}\right\|=\frac{25}{2\nu^2}$ τ.μ.

Από το α)iii. έχουμε $\left(\mathrm{ABO}\right)=\frac{25}{2}$ τ.μ., οπότε τελικά,

$$\left(\mathrm{A\Gamma\Delta}\right)=\frac{25}{2\nu^2}=\frac{1}{\nu^2}\cdot\frac{25}{2}=\left(\frac{1}{\nu}\right)^2\cdot\left(\mathrm{ABO}\right).$$