ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε:

$$\begin{cases} P(1)=2 \\ P(2)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot 1^3-\alpha\cdot 1^2+2\cdot 1+\beta=2 \\ 2\cdot 2^3-\alpha\cdot 2^2+2\cdot 2+\beta=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+\beta=-2 \\ -4\alpha+\beta=-5 \end{cases} \overset{(-)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -3\alpha=-3 \\ -\alpha+\beta=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-1. \end{cases}$$

Άρα $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$.

β)

i. Από το α) ερώτημα, έχουμε $P(x)=2x^3-x^2+2x-1$. Οπότε:

$P(x)=2x^3-x^2+2x-1=x^2\left(2x-1\right)+\left(2x-1\right)=\left(2x-1\right)\left(x^2+1\right)$. Άρα το πολυώνυμο $\pi(x)=x^2+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ii. Έχουμε ισοδύναμα:

$P(x)=0$, δηλαδή

$\left(2x-1\right)\left(x^2+1\right)=0$, οπότε

$\left(2x-1\right)=0$ (αφού $x^2+1\neq 0$ για κάθε x) και τελικά

$x=\dfrac{1}{2}$.

γ) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\sigma\upsilon\nu^3x+\sigma\upsilon\nu x=1-\frac{1}{2}\eta\mu^2x \underset{(\cdot 2)}{\overset{\left(\eta\mu^2x=1-\sigma\upsilon\nu^2x\right)}{\Leftrightarrow}}$$
$$2\sigma\upsilon\nu^3x+2\sigma\upsilon\nu x=2-\left(1-\sigma\upsilon\nu^2x\right)\Leftrightarrow$$
$$2\sigma\upsilon\nu^3x+2\sigma\upsilon\nu x=2-1+\sigma\upsilon\nu^2x\Leftrightarrow$$
$$2\sigma\upsilon\nu^3x-\sigma\upsilon\nu^2x+2\sigma\upsilon\nu x-1=0\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$
$$P(\sigma\upsilon\nu x)=0.$$

Οπότε από το βii) ερώτημα έχουμε $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{1}{2}$ και επειδή $x\in\left(0,2\pi\right)$,

$x=\dfrac{\pi}{3}$, $x=2\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{3}$.