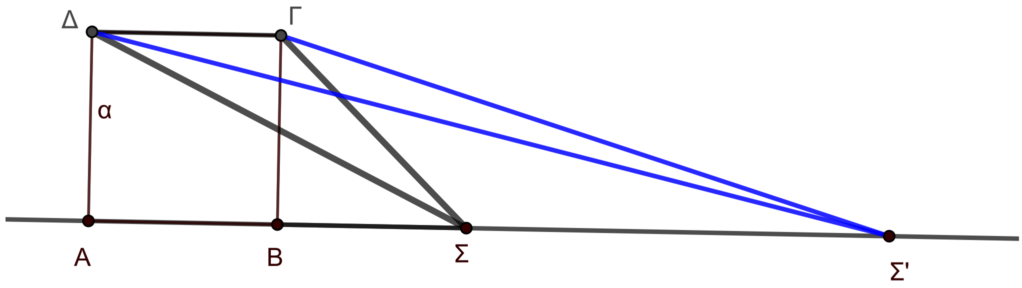
ΛΥΣΗ



α)

i. Για το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΓ μπορούμε να πάρουμε για βάση την πλευρά ΔΓ και για ύψος την κάθετη από το Σ προς τη ΔΓ, η οποία είναι ίση με α, οπότε (ΣΔΓ) = $\frac{α \cdot α}{2} = \frac{α^2}{2}$, δηλαδή ισούται με το μισό του εμβαδού του αρχικού τετραγώνου.

ii. Για να υπολογίσουμε την περίμετρο του τριγώνου ΣΔΓ θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τα μήκη των πλευρών του ΣΔ και ΣΓ ως συνάρτηση του α.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΣΒΓ έχουμε $ΣΓ^2 = ΣΒ^2 + ΒΓ^2$ ή $ΣΓ^2 = \alpha^2 + \alpha^2$ ή $ΣΓ^2 = 2\,\alpha^2$ ή ΣΓ = $α\sqrt{2}$.

Αντίστοιχα από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΣΔ έχουμε $ΣΔ^2 = ΣΑ^2 + ΑΔ^2$ ή $ΣΔ^2 = (2\,\alpha)^2 + \alpha^2$ ή $ΣΔ^2 = 5\,\alpha^2$ ή ΣΔ = $α\sqrt{5}$.

Οπότε η περίμετρος του τριγώνου ΣΔΓ είναι ίση με ΣΓ + ΣΔ + ΔΓ = $α\sqrt{2} + α\sqrt{5} + α$.

β)

i. Τα τρίγωνα ΣΔΓ και Σ’ΔΓ έχουν κοινή πλευρά τη ΔΓ οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών τους προς την πλευρά αυτή .

Όμως τα ύψη αυτά εκφράζουν την απόσταση των παραλλήλων πλευρών του τετραγώνου, οπότε είναι ίσα μεταξύ τους και ίσα με την πλευρά α του τετραγώνου. ‘Αρα $\frac{(ΣΔΓ)}{(Σ'ΔΓ)} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$, οπότε τα εμβαδά των τριγώνων ΣΔΓ και Σ’ΔΓ είναι ίσα μεταξύ τους και το καθένα ίσο με το μισό του εμβαδού του τετραγώνου, όπως φαίνεται στο αi).

Συνεπώς ο ισχυρισμός του Βρασίδα σχετικά με τα εμβαδά των δυο τριγώνων δεν είναι σωστός.

Το τρίγωνο Σ’ΔΓ είναι ισεμβαδικό με το τρίγωνο ΣΔΓ.

ii. Σύμφωνα με αυτό που αποδείχθηκε στην τάξη ισχύει ότι : Σ’Γ > ΣΓ και Σ’Δ > ΣΔ, άρα, ΔΓ + Σ’Γ + Σ’Δ > ΔΓ+ ΣΓ + ΣΔ, οπότε η περίμετρος του τριγώνου Σ’ΔΓ είναι μεγαλύτερη από την περίμετρο του τριγώνου ΣΔΓ.

Ο ισχυρισμός του Βρασίδα για τις περιμέτρους των δύο τριγώνων είναι σωστός.