ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα γράφεται:

$$x^2-2x+1+(y+2)^2=2x+6 \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2-4x+1+3\right)+(y+2)^2=3+6 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2=9$$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2,-2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{9}=3$.

β) Για να δείξουμε ότι η αρχή Ο των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου αρκεί να δείξουμε ότι η αρχή των αξόνων Ο απέχει από το κέντρο Κ απόσταση μικρότερη από την ακτίνα.

Πράγματι, είναι:

$$(KO)=\sqrt{(0-2)^2+(0+2)^2}=\sqrt{8}<\sqrt{9}=3=\rho$$ και έπεται το ζητούμενο.

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΚΟ είναι:

$$\lambda_{KO}=\frac{y_O-y_K}{x_O-x_K}=\frac{0-(-2)}{0-2}=\frac{2}{-2}=-1.$$

Το τμήμα ΚΟ (απόστημα) είναι κάθετο στην (ε) έτσι, έχουμε:

$$(\varepsilon)\perp KO \Rightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{KO}=-1 \Rightarrow \lambda_\varepsilon\cdot(-1)=-1 \Rightarrow \lambda_\varepsilon=1.$$

Η ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=1$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα έχει εξίσωση:

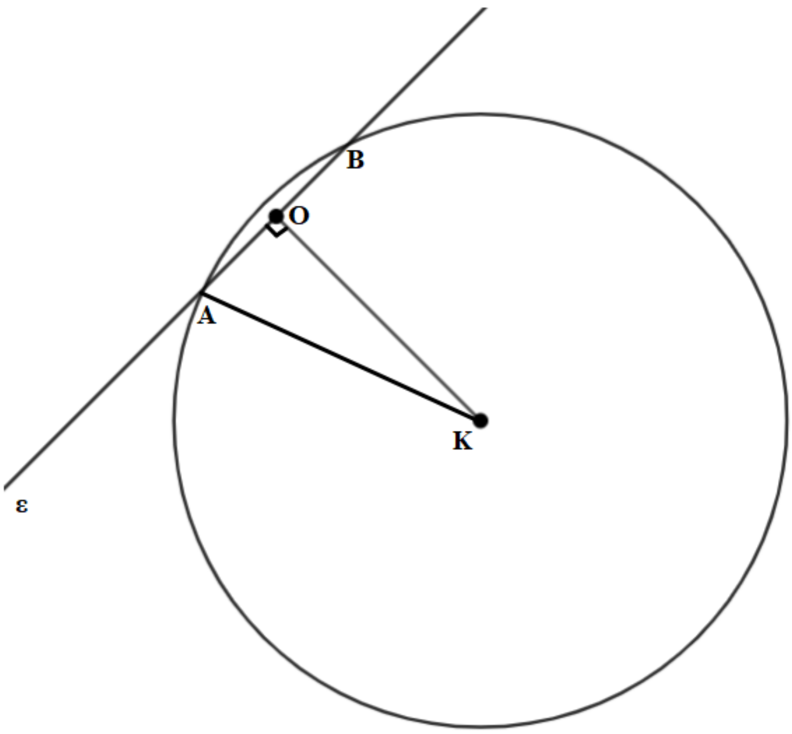
$$y=\lambda_\varepsilon x \Leftrightarrow y=x.$$

δ) Είναι $(KAB)=\frac{1}{2}(KO)(AB)=\frac{1}{2}\sqrt{8}(AB)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}(AB)=(AB)\sqrt{2}$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΚ έχουμε:

$$(OA)^2=(KA)^2-(KO)^2 \Leftrightarrow (OA)^2=3^2-\left(\sqrt{8}\right)^2 \Leftrightarrow (OA)^2=9-8=1 \Leftrightarrow (OA)=1.$$

Άρα $(AB)=2(OA)=2\cdot 1=2$ οπότε $(KAB)=2\sqrt{2}$ τετραγωνικές μονάδες.



B
O
A
K
ε