ΛΥΣΗ

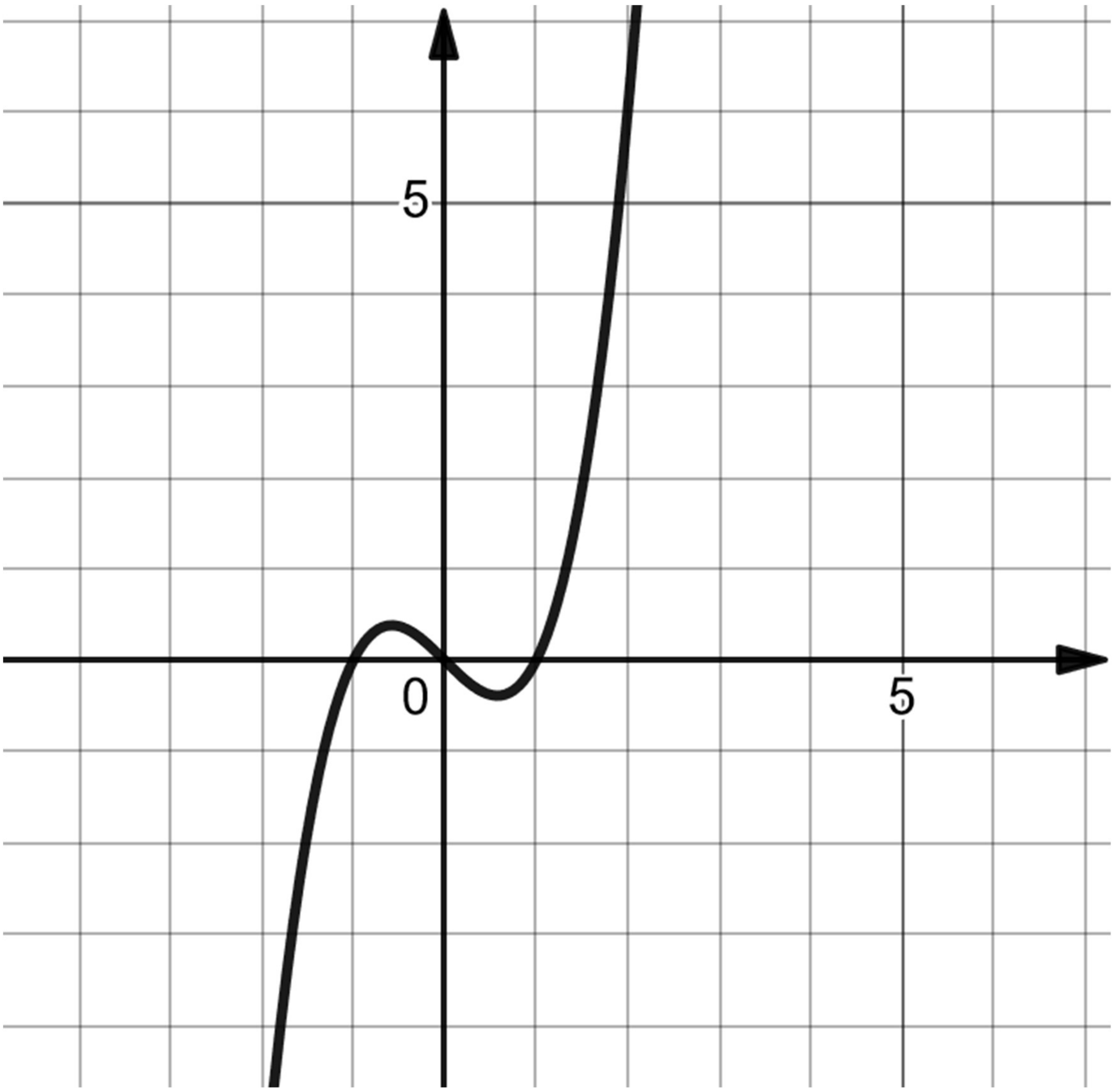
α)

i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι:

- $-x \in \mathbb{R}$ και
- $h(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -h(x)$

Επομένως η συνάρτηση h είναι περιττή.

ii. Συμπληρώνουμε το συμμετρικό τμήμα της δοθείσας γραφικής παράστασης ως προς την αρχή των αξόνων O.



iii. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$ έχουν τεταγμένη $y = 0$, με $y = h(x)$.

Είναι

$$
\begin{aligned}
y=0 &\Leftrightarrow h(x)=0\\
&\Leftrightarrow x^3-x=0\\
&\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)=0\\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^2-1=0\\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^2=1\\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=\pm 1
\end{aligned}
$$

Οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι τα $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(1,0)$ και $\mathrm{B}(-1,0)$.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y=x$ αν και μόνο αν για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει $g(x)>x \quad :(\mathrm{A})$.

Για $x\in[0,+\infty)$ έχουμε: $g(x)>x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}>x$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3>x^3\\
&\Leftrightarrow x>x^3\\
&\Leftrightarrow 0>x^3-x\\
&\Leftrightarrow 0>h(x)
\end{aligned}
$$

Επομένως, ισχύει η (A) αν και μόνο αν $h(x)<0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και έπεται το ζητούμενο.

Σχόλιο: Μπορούμε να αποδείξουμε και την εξής πρόταση «Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y=x$ αν και μόνο αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)>x \quad :(\mathrm{A})$» . Αυτό μπορεί να γίνει αν συμπληρώσουμε στη λύση του ερωτήματος (β) τα παρακάτω:

Για $x\in(-\infty,0)$ έχουμε: $g(x)>x \Leftrightarrow -\sqrt[3]{-x}>x$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt[3]{-x}<-x\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{-x}\right)^3<(-x)^3\\
&\Leftrightarrow -x<-x^3\\
&\Leftrightarrow x^3-x<0\\
&\Leftrightarrow h(x)<0
\end{aligned}
$$

Επομένως, ισχύει η (A) αν και μόνο αν $h(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και έπεται το ζητούμενο.