Λύση

α) Εφόσον το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές, οι πιθανές ακέραιες ρίζες του θα είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου 4, δηλαδή οι αριθμοί $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Αντικαθιστώντας στο πολυώνυμο $P(x)$ όπου x τον αριθμό 2 παρατηρούμε ότι:

$P(2)=2^3-2\cdot 2^2-2\cdot 2+4=8-8-4+4=0$, άρα η μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου είναι το 2.

β) Εφόσον το 2 είναι ρίζα του $P(x)$ ισχύει ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ οπότε εκτελώντας τη διαίρεση έχουμε:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-2x^2-2x+4 & x-2 \\ \cline{2-2}
-x^3+2x^2 \qquad\qquad & x^2-2 \\
-2x+4 & \\
2x-4 & \\
0 &
\end{array}
$$

Συνεπώς, η εξίσωση γράφεται: $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$.

Οπότε οι ρίζες του πολυωνύμου είναι $x=2$, $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$.

Το πολυώνυμο γράφεται: $P(x)=(x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

**Δεύτερη λύση:**

Η εξίσωση $x^3-2x^2-2x+4=0$ γράφεται ισοδύναμα:

$$
\begin{aligned}
x^3-2x^2-2x+4=0 &\Leftrightarrow x^2(x-2)-2(x-2)=0 \Leftrightarrow \\
(x-2)(x^2-2)=0 &\Leftrightarrow \\
x-2=0 \text{ ή } x^2-2=0 &\Leftrightarrow \\
x=2 \text{ ή } x^2=2 &\Leftrightarrow \\
x=2 \text{ ή } x=\pm\sqrt{2}&.
\end{aligned}
$$

Οπότε οι ρίζες του πολυωνύμου είναι $x=2$, $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$.

Συνεπώς, η εξίσωση έχει μοναδική ακέραια ρίζα την $x=2$.

Το πολυώνυμο γράφεται: $P(x)=(x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.