ΛΥΣΗ

α) i. Είναι:

$$x^2+y^2+y=x+2xy+6 \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy-x+y-6=0 \Leftrightarrow (x-y)^2-(x-y)-6=0$$

που είναι το ζητούμενο.

ii. Αν θέσουμε $x-y=u$ τότε η τελευταία εξίσωση γράφεται $u^2-u-6=0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς $-2, 3$ οπότε έχουμε:

- $u=-2: x-y=-2 \Leftrightarrow x-y+2=0$
- $u=3: x-y=3 \Leftrightarrow x-y-3=0$

Επομένως η εξίσωση παριστάνει το ζεύγος των ευθειών

$$\varepsilon_1: x-y-3=0 \text{ και } \varepsilon_2: x-y+2=0$$

που έχουν το ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, $\lambda_1=\lambda_2=1$ και είναι παράλληλες μεταξύ τους.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $d(M, \varepsilon_1)=d(M, \varepsilon_2)$.

Είναι:

$$d(M, \varepsilon_1)=\frac{\left|\alpha-\alpha+\frac{1}{2}-3\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{2\sqrt{2}} \text{ και } d(M, \varepsilon_2)=\frac{\left|\alpha-\alpha+\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{2\sqrt{2}}$$

οπότε $d(M, \varepsilon_1)=d(M, \varepsilon_2)$.

γ) Το σημείο Μ ισαπέχει από τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οπότε βρίσκεται πάνω στην μεσοπαράλληλη τους. Επιπλέον καθεμιά από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$, οπότε η μεσοπαράλληλη διέρχεται από το Μ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$. Άρα η εξίσωση της είναι:

$$y-\alpha+\frac{1}{2}=1(x-\alpha) \Leftrightarrow y=x-\frac{1}{2}$$