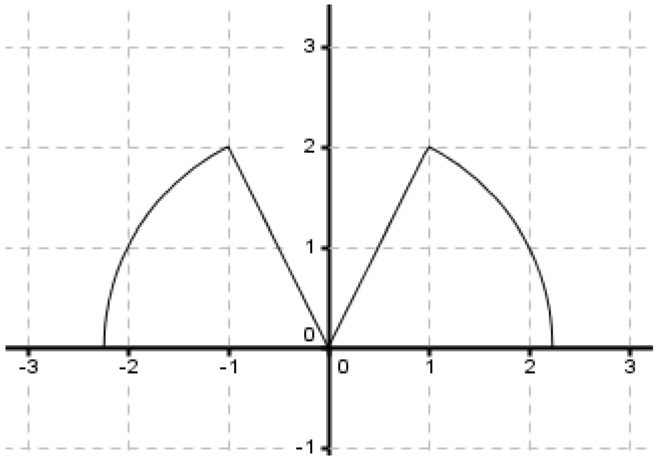
ΛΥΣΗ

α) Η f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. Θεωρώντας το συμμετρικό του δοσμένου σχήματος ως προς τον $y'y$ προκύπτει η γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος στο οποίο φαίνεται η γραφική παράσταση της f για όλες τις τιμές του x.



β) Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-\sqrt{5}, -1]$ και $[0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[1, \sqrt{5}]$. Η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 0 και προκύπτει όταν $x = -\sqrt{5}$, $x = 0$ ή $x = \sqrt{5}$. Η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1 και προκύπτει όταν $x = -1$ ή $x = 1$.

γ) i. Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση ημίτονο είναι γνησίως αύξουσα και η συνάρτηση συνημίτονο είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επιπλέον $ημ\frac{\pi}{4} = συν\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε με $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\theta > \frac{\pi}{4} \Rightarrow ημ\theta > ημ\frac{\pi}{4} \text{ και } \theta > \frac{\pi}{4} \Rightarrow συν\theta < συν\frac{\pi}{4}, \text{ επομένως}$$

$$ημ\theta > ημ\frac{\pi}{4} = συν\frac{\pi}{4} > συν\theta, \text{ άρα } ημ\theta > συν\theta$$

ii. Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ)i. και δεδομένου ότι οι αριθμοί $ημ\theta$ και $συν\theta$ περιέχονται στο διάστημα $[0, 1]$, όπου η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$$ημ\theta > συν\theta \Rightarrow f(ημ\theta) > f(συν\theta)$$

Εναλλακτική αντιμετώπιση του γ) i.

Η ανισοτική σχέση ανάμεσα στα $ημ\theta$ και $συν\theta$ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ μπορούσε να προκύψει επίσης και από τον τριγωνομετρικό κύκλο ή τις γραφικές παραστάσεις των αντίστοιχων συναρτήσεων.