ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε σημείο $N(x,y)$ του επιπέδου. Τότε $\overrightarrow{NA}=(1-x,-y)$, $\overrightarrow{NB}=(-x,-1-y)$, οπότε ισχύει:

$\overrightarrow{NA}^2-\overrightarrow{NB}^2=4 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{NA}\right|^2-\left|\overrightarrow{NB}\right|^2=4 \Leftrightarrow (1-x)^2+y^2-x^2-(1+y)^2=4 \Leftrightarrow$

$x+y+2=0.$

Άρα τα ζητούμενα σημεία N ανήκουν σε ευθεία με εξίσωση (ε): $y=-x-2$.

β) Έστω σημείο $P(x,y)$ του επιπέδου. Τότε, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, ισχύει:

$$2x^2+2y^2+10x+14y+21=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+5x+7y+\frac{21}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+2x\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2+y^2+2y\frac{7}{2}+\left(\frac{7}{2}\right)^2=-\frac{21}{2}+\frac{25}{4}+\frac{49}{4} \Leftrightarrow$$

$$c_2:\ \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=8$$

Άρα τα σημεία P ανήκουν σε κύκλο c_2, με κέντρο $\Lambda\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνα $R=2\sqrt{2}$.

<u>2ος τρόπος</u>:

$2x^2+2y^2+10x+14y+21=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+5x+7y+\frac{21}{2}=0.$

Αλλά $5^2+7^2-4\cdot\frac{21}{2}=32>0$, επομένως η εξίσωση παραστάνει κύκλο, με κέντρο $\Lambda\left(-\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{32}}{2}=2\sqrt{2}$.

γ)

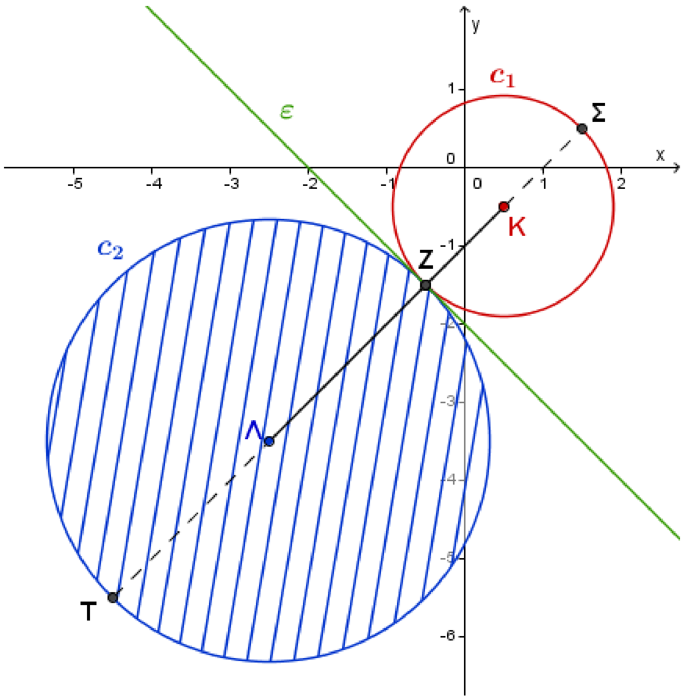
i. Οι κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά, διότι έχουν διάκεντρο

$\delta=(K\Lambda)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}+\frac{7}{2}\right)^2}=3\sqrt{2}$ και ισχύει $\delta=\rho+R$.

Άρα η ελάχιστη απόσταση των σημείων των δύο κύκλων είναι μηδέν και η μέγιστη απόσταση είναι ίση με $\Sigma T=\Sigma Z+ZT=2\rho+2R=6\sqrt{2}$.

ii. Είναι $d(K,\varepsilon)=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=\rho$ και $d(\Lambda,\varepsilon)=\frac{\left|-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}+2\right|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}=R$.

Άρα η ευθεία (ε) είναι η ζητούμενη κοινή εφαπτομένη.



y
x
c_1
c_2
ε
Σ
K
Z
Λ
T
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
-6