

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,-1)$ και ο κύκλος c_1 με εξίσωση

$$c_1: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.$$

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $N(x,y)$ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\overline{NA}^2 - \overline{NB}^2 = 4$, ανήκουν στην ευθεία (ε) με εξίσωση $y = -x - 2$.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων P του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση $2x^2 + 2y^2 + 10x + 14y + 21 = 0$, ανήκουν σε κύκλο c_2 κέντρου $\Lambda\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας $R = 2\sqrt{2}$.

(Μονάδες 06)

γ)

i. Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους.

(Μονάδες 06)

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων c_1 και c_2 .

(Μονάδες 06)