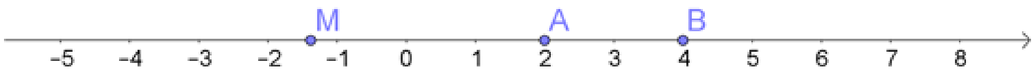
ΛΥΣΗ

α) Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς x των οποίων η απόσταση από το 4 είναι δύο μονάδες μεγαλύτερη από την απόστασή τους από το 2. Δηλαδή $d(x,4)-d(x,2)=2$.

β) Έστω ότι τα σημεία M, A, B αναπαριστούν στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς x, 2 ,4 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

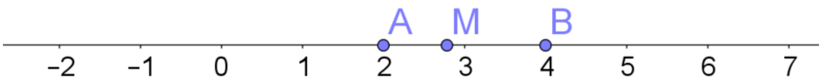
Παρατηρούμε ότι $d(2,4)=(\mathrm{AB})=2$.

Για κάθε αριθμό $x\in(-\infty,2]$ είναι $d(x,4)-d(x,2)=(\mathrm{MB})-(\mathrm{MA})=(\mathrm{AB})=2$.

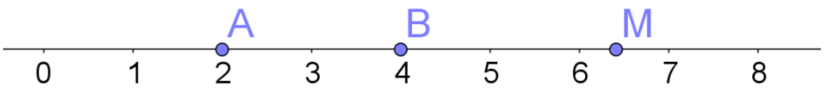


Για κάθε αριθμό $x\in(2,4]$ είναι

$d(x,4)-d(x,2)<d(x,4)+d(x,2)=(\mathrm{MB})+(\mathrm{MA})=(\mathrm{AB})=2$ και άρα $d(x,4)-d(x,2)\neq 2$.



Για κάθε αριθμό $x\in(4,+\infty)$ είναι $(\mathrm{MB})<(\mathrm{MA})$ οπότε $d(x,4)<d(x,2)$ δηλαδή $d(x,4)-d(x,2)<0$ και άρα $d(x,4)-d(x,2)\neq 2$.



γ) όπως δείξαμε στο β), αν για τον πραγματικό αριθμό ισχύει x ότι $|x-4|-|x-2|=2$, τότε $x\in(-\infty,2]$.

Το τριώνυμο x^2-6x+8 έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 4 και γίνεται μη αρνητικό για $x\in(-\infty,2]\cup[4,+\infty)$.

Συνεπώς αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x-4|-|x-2|=2$, τότε $x\in(-\infty,2]$ και $x^2-6x+8\geq 0$.