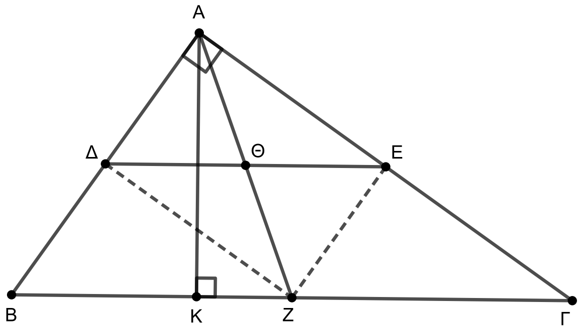
α)

i.



Το τμήμα ΕΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα ΕΖ // ΑΒ οπότε και ΕΖ // ΑΔ και ΕΖ = $\frac{\mathrm{AB}}{2}$ = ΑΔ. Άρα το τετράπλευρο ΑΔΖΕ έχει τις απέναντι πλευρές του ΑΔ και ΕΖ ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επιπλέον η γωνία του Α είναι ορθή, άρα το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο.

ii. Το τμήμα ΔΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε ΔΕ//ΒΓ και ΔΕ = $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

Οι ΑΖ, ΔΕ είναι διαγώνιες του ορθογωνίου ΑΔΖΕ, οπότε είναι ίσες και διχοτομούνται με Θ το κέντρο του. Άρα ΑΘ = $\frac{\mathrm{AZ}}{2} = \frac{\Delta\mathrm{E}}{2} =$ ΘΕ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΘΕ ενώνει τα μέσα των ΑΖ και ΑΓ στο τρίγωνο ΑΖΓ, άρα ΘΕ = $\frac{\mathrm{Z\Gamma}}{2} = \frac{\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}}{2} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{4}$.

β)

i. Επειδή $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ = 90^o, το ΖΕ είναι ύψος στο τρίγωνο ΑΖΓ και επειδή είναι και διάμεσος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Άρα $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{\Gamma}$ = 30^o.

Η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΖΓ, άρα: $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma + \hat{\Gamma}$ = 60^o.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma}$ = 30^o, άρα ΑΒ = $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ (1). Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε: $\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}$ = 90^o ή $\hat{\mathrm{B}}$ = 60^o. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΒ έχουμε: $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K} + \hat{\mathrm{B}}$ = 90^o ή $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{K}$ = 30^o. Οπότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΚ είναι ΒΚ = $\frac{\mathrm{AB}}{2}$ και λόγω της (1) ΒΚ = $\frac{\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}}{2}$ ή

$\mathrm{BK} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{4}$.