ΛΥΣΗ

α) $x - x^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, ισχύει.

Το ίσον ισχύει αν και μόνον αν $x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

β)

i. Αρχικά παρατηρούμε ότι το σημείο Δ έχει τετμημένη μηδέν και τεταγμένη $f(0) = 1$, ενώ αν είναι k η τετμημένη του σημείου Ε, η τεταγμένη του θα είναι $f(k) = 0 = 1 - k$, άρα $k = 1$. Ώστε $\Delta(0,1)$ και $E(1,0)$.

   Έστω τώρα ότι α είναι η τετμημένη του σημείου Α, με $0 \leq \alpha \leq 1$, οπότε το σημείο Α έχει τεταγμένη $f(\alpha) = 1 - \alpha$.

   Έτσι έχουμε $\Gamma(\alpha, 0)$, $A(\alpha, 1 - \alpha)$, $B(0, 1 - \alpha)$.

   Επομένως το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΟΓ είναι $E = \alpha \cdot (1 - \alpha) = \alpha - \alpha^2$.

ii. Σύμφωνα με το α) ερώτημα είναι $E \leq \frac{1}{4}$, δηλαδή για οποιαδήποτε τιμή του α, το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται το πολύ $\frac{1}{4}$. Το ίσον ισχύει αν και μόνον αν $\alpha = \frac{1}{2}$, οπότε σε αυτή την περίπτωση είναι $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, δηλαδή το ΑΒΟΓ θα γίνει τετράγωνο.