ΛΥΣΗ

α) $x - x^{2}\leq \frac{1}{4}⇔x^{2}- x+\frac{1}{4}\geq 0⇔x^{2}- 2∙x∙\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2}\geq 0⇔\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}\geq 0$, ισχύει.

Το ίσον ισχύει αν και μόνον αν $x - \frac{1}{2} =0⇔x=\frac{1}{2}$.

β)

1. Αρχικά παρατηρούμε ότι το σημείο Δ έχει τετμημένη μηδέν και τεταγμένη $f(0)=1,$ ενώ αν είναι $k $η τετμημένη του σημείου Ε, η τεταγμένη του θα είναι $f(k) =0 = 1 - k, $άρα $k=1.$ Ώστε $Δ(0,1)$ και $Ε(1,0)$.

Έστω τώρα ότι $α$ είναι η τετμημένη του σημείου Α, με $0\leq α\leq 1,$ οπότε το σημείο Α έχει τεταγμένη $f(α)=1 – α$.

 Έτσι έχουμε $Γ(α, 0)$, $Α(α, 1 - α)$, $Β(0, 1- α)$.

Επομένως το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΟΓ είναι $Ε = α∙\left(1 - α\right)=α - α^{2}$ .

1. Σύμφωνα με το α) ερώτημα είναι $Ε\leq \frac{1}{4}$, δηλαδή για οποιαδήποτε τιμή του α, το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται το πολύ$ \frac{1}{4 }$. Το ίσον ισχύει αν και μόνον αν $α=\frac{1}{2}$, οπότε σε αυτή την περίπτωση είναι $Α\left(\frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right)$, δηλαδή το ΑΒΟΓ θα γίνει τετράγωνο.

x

y

y΄

x΄

(ε)