ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18=\alpha^2(\alpha+2)+9(\alpha+2)=(\alpha+2)(\alpha^2+9)$$

που είναι το ζητούμενο.

β) i. Ισχύει: $\alpha^2+2\alpha=\alpha(\alpha+2)$, οπότε με $\alpha>0$ έχουμε:

$$A=\frac{\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18}{\alpha^2+2\alpha}=\frac{(\alpha^2+9)(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+2)}=\frac{\alpha^2+9}{\alpha}$$

ii. Επειδή $\alpha>0$ για την απόδειξη της $A\geq 6$, δηλαδή της $\frac{\alpha^2+9}{\alpha}\geq 6$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\alpha^2+9\geq 6\alpha$, ή αρκεί $\alpha^2-6\alpha+9\geq 0$, που ισχύει αφού προκύπτει από την προφανή ανισότητα $(\alpha-3)^2\geq 0$.

Η ισότητα $A=6$ ισχύει μόνο όταν $(\alpha-3)^2=0$, δηλαδή μόνο όταν $\alpha=3$.