

Λύση

α) Έχουμε διαδοχικά: $3=4-1=2^2-1^2$, $5=3^2-2^2$ και σκεπτόμενοι ότι

$7=M^2-N^2=(M-N)(M+N)$, ένα γινόμενο ακεραίων που δίνει 7 είναι οι 1, 7.

Αν $M>N$ τότε $M-N=1$, $M+N=7$ και λύνοντας το σύστημα έχουμε με αντικατάσταση:

$M=N+1$ και $N+1+N=7$, άρα $2N=6$, δηλαδή $N=3$ και $M=4$.

Οπότε $7=(4)^2-(3)^2$.

β) i) Έστω οι διαδοχικοί ακέραιοι $k, k+1, k \in \mathbb{Z}$.

Η διαφορά των τετραγώνων τους είναι $(k+1)^2-k^2=k^2+2k+1-k^2=2k+1, k \in \mathbb{Z}$.

Ο οποίος είναι περιττός αριθμός.

ii) Έχουμε ότι $2021=2 \cdot 1010+1$.

Από την απόδειξη στο προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$2021=(1010+1)^2-(1010)^2=1011^2-1010^2$.

γ) Η γραμμοσκιασμένη περιοχή έχει εμβαδόν όσο η διαφορά των εμβαδών των τετραγώνων ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ.

Το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά $v+1$, ενώ το ΓΗΡΚ έχει πλευρά v .

Ισχύει $(v+1)^2-v^2=45$, οπότε $2v+1=45 \Leftrightarrow 2v=44 \Leftrightarrow v=22$.