ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$\Delta = (-\mu)^2 - 4.1.(-2) = \mu^2 + 8 > 0$ για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

β) Είναι:

$f(-2) = 4 + 2\mu - 2 = 2\mu + 2$, $\; f(1) = 1 - \mu - 2 = -\mu - 1$

$f(3) = 9 - 3\mu - 2 = 7 - 3\mu$.

Για να βρίσκονται τα $x = -2$ και $x = 3$ εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ ενώ το $x = 1$ εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu + 2 > 0 \\ -\mu - 1 < 0 \\ 7 - 3\mu > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu > -1 \\ \mu > -1 \\ \mu < \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < \mu < \frac{7}{3}.$$

γ)

i. Για να είναι τα $f(-2)$, $f(1)$, $f(3)$ με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα πρέπει να ισχύει:

$$\left(f(1)\right)^2 = f(-2) \cdot f(3) \Leftrightarrow$$
$$(-\mu - 1)^2 = (2\mu + 2) \cdot (7 - 3\mu) \Leftrightarrow$$
$$(\mu + 1)^2 - 2(\mu + 1) \cdot (7 - 3\mu) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\mu + 1) \cdot (\mu + 1 - 14 + 6\mu) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\mu + 1) \cdot (7\mu - 13) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\mu = -1 \text{ ή } 7\mu - 13 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\mu = -1 \text{ ή } \mu = \frac{13}{7}.$$

Άρα $\mu = \frac{13}{7}$ αφού $\mu \in (-1, \frac{7}{3})$.

ii. Για $\mu = \frac{13}{7}$ είναι:

$f(-2) = \frac{26}{7} + 2 = \frac{40}{7}$, $\; f(1) = -\frac{13}{7} - 1 = -\frac{20}{7}$ και $\; f(3) = 7 - \frac{39}{7} = \frac{10}{7}$.

Άρα ο λόγος $\lambda = \frac{-\frac{20}{7}}{\frac{40}{7}} = -\frac{1}{2}$.