Λύση

α) Έχουμε $\Delta = (-\alpha)^2 - 4[-(\alpha+1)] = \alpha^2 + 4\alpha + 4 = (\alpha+2)^2$.

● Αν $\alpha = -2$ τότε $\Delta = 0$ άρα το τριώνυμο έχει μοναδική ρίζα.

● Αν $\alpha \neq -2$ τότε $\Delta > 0$ άρα έχει δυο ρίζες άνισες.

β)

(i) Αφού $\alpha > -2$ τότε το f(x) έχει δυο ρίζες άνισες, τις $x = \frac{-(-\alpha)\pm\sqrt{(\alpha+2)^2}}{2}$ άρα $x = \frac{\alpha\pm(\alpha+2)}{2}$, οπότε η μία ρίζα είναι $x = \frac{2\alpha+2}{2} = \frac{2(\alpha+1)}{2} = \alpha + 1$ και η άλλη $x = \frac{\alpha-\alpha-2}{2} = -1$.

(ii) Έχει ρίζες τις -1, $\alpha+1$ με $\alpha > -2 \Leftrightarrow \alpha + 1 > -1$ και το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-1		$\alpha+1$		$+\infty$
$x^2 - \alpha x - (\alpha+1)$		+	0	-	0	+	

Άρα $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [-1, \alpha+1]$.

Οπότε πρέπει $(\alpha+1) - (-1) = \alpha + 2 = 2024 \Leftrightarrow \alpha = 2022$.

(iii) Παρατηρούμε ότι $-1 < \frac{\alpha}{2} < \alpha + 1$ διότι:

$-1 < \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha > -2$ ισχύει και $\frac{\alpha}{2} < \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha < 2\alpha + 2 \Leftrightarrow \alpha > -2$, ισχύει

Τότε σύμφωνα με το ερώτημα (ii) θα είναι $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$.