ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν του $ΕΖΗΘ$ είναι $(ΕΖΗΘ) = (ΘΕ)^2$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΕΘ$ είναι $(ΑΕ) = x$ και $(ΑΘ) = α - x$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$(ΘΕ)^2 = (ΑΕ)^2 + (ΑΘ)^2$$

Άρα, $(ΕΖΗΘ) = x^2 + (α - x)^2$.

Επίσης, επειδή το $Θ$ είναι σημείο της πλευράς $ΔΑ$ και x είναι η απόσταση από την κορυφή $Δ$, θα είναι:

$$0 \leq (ΔΘ) \leq (ΔΑ) \Leftrightarrow 0 \leq x \leq α.$$

β) Το εμβαδόν του $ΑΒΓΔ$ είναι $(ΑΒΓΔ) = α^2$. Άρα η ζητούμενη σχέση γράφεται:

$$(ΕΖΗΘ) \geq \frac{(ΑΒΓΔ)}{2} \Leftrightarrow x^2 + (α - x)^2 \geq \frac{α^2}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2(α - x)^2 \geq α^2 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + 2α^2 - 4αx + 2x^2 \geq α^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 + α^2 - 4αx \geq 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 2α2x + α^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2x - α)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

γ) Από το ερώτημα α) για $x = 1$ είναι:

$$(ΕΖΗΘ) = 1^2 + (α - 1)^2 = 1 + α^2 - 2α + 1 = α^2 - 2α + 2.$$

Οπότε η σχέση $(ΕΖΗΘ) = \frac{2}{3}(ΑΒΓΔ)$ ισοδύναμα γίνεται:

$$α^2 - 2α + 2 = \frac{2}{3}α^2 \Leftrightarrow$$

$$3α^2 - 6α + 6 = 2α^2 \Leftrightarrow$$

$$α^2 - 6α + 6 = 0.$$

Η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού ως προς $α$ με διακρίνουσα $Δ = 6^2 - 4 \cdot 6 = 12 > 0$ και ρίζες:

$$α_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} α_1 = 3 - \sqrt{3} \approx 3 - 1{,}73 = 1{,}27 \\ α_2 = 3 + \sqrt{3} \approx 4{,}73 \end{cases}$$

Από το ερώτημα α), πρέπει να ισχύει $x \leq α$, η οποία για $x = 1$ γίνεται $1 \leq α$.

Παρατηρούμε ότι και οι δύο τιμές είναι δεκτές.