

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) + \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5}) = \frac{6}{2} = 3$$

και

$$\alpha \cdot \beta = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{4}(3^2 - \sqrt{5}^2) = \frac{1}{4}(9 - 5) = \frac{4}{4} = 1$$

Άρα, $\alpha + \beta = 3$ και $\alpha \cdot \beta = 1$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{1}{4}(3 + \sqrt{5})^2 + \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5})^2 = \frac{1}{4}(9 + 5 + 6\sqrt{5} + 9 + 5 - 6\sqrt{5}) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 28 = 7 \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

Υπόδειξη για εναλλακτική λύση.

Το ερώτημα (β) μπορεί να αποδειχθεί άμεσα από το (α) με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$